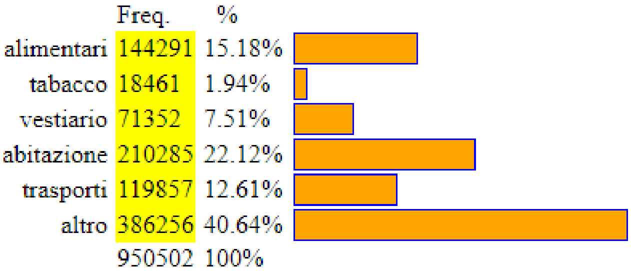
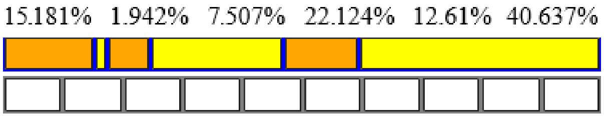
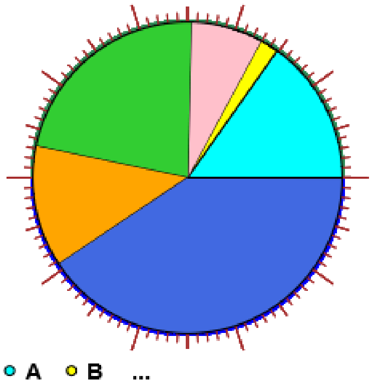
4. Diagrammi a settori circolari, altri diagrammi

Qui sotto, a sinistra, abbiamo riprodotto l'istogramma relativo ai consumi degli italiani nel 2010. Abbiamo già osservato che mediante gli istogrammi si possono fare rapidamente delle valutazioni *a occhio*: possiamo osservare che la spesa per la voce "altro" e quella per le abitazioni hanno maggiore incidenza delle altre voci, che le spese per alimentari e trasporti hanno un peso simile, …; non siamo, però, in grado di valutare dal disegno quale incidenza abbia ciascuna categoria di consumi rispetto al totale (per ovviare a ciò a lato delle colonne si possono scrivere le percentuali, come abbiamo fatto nel caso raffigurato). La successiva rappresentazione a striscia facilita il confronto visivo tra una voce e il totale, ma risulta più difficile il confronto tra le varie voci.

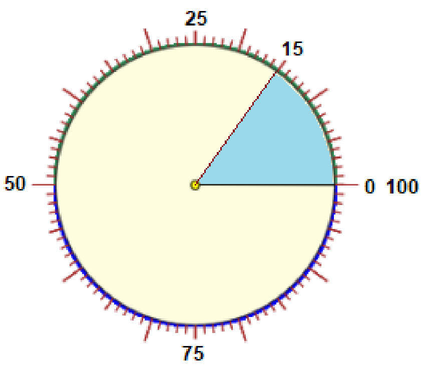


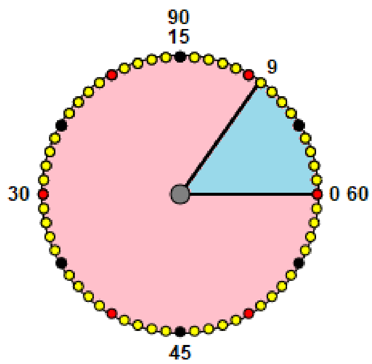




A: alim., B: tab., C: vest., D: abit., D: trasp., E: altro

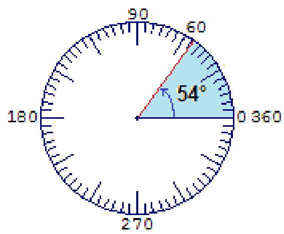
Un buon confronto visivo sia tra le varie voci che tra ogni voce e il totale è offerto da un ulteriore tipo di rappresentazione, quella raffigurata sopra a destra: i ***diagrammi a settori circolari***. Il totale viene rappresentato con un cerchio che è suddiviso in settori circolari in modo che le loro ampiezze siano proporzionali ai dati. Ad es. se ci limitiamo ad alimentari e non alimentari, possiamo ottenere i diagrammi sottostanti.





Il contorno del primo cerchio è suddiviso in 100 parti; quello del secondo in 60. In questo 15 su 100 è rappresentato da 9 su 60: 9/60 è infatti uguale a 3/20, valore uguale anche a 15/100: 15 = 3·5, 100 = 20·5 (se vuoi, il primo cerchio lo trovi **qui**, il secondo **qui**).

In generale, il totale viene rappresentato con un cerchio che è suddiviso in spicchi le cui ampiezze siano proporzionali ai dati. Se misurassimo le ampiezze degli spicchi in gradi, per gli alimentari prenderemmo un'ampiezza di 54°, infatti 54/360 = 9/60 (54 = 9·6, 360 = 60·6).



Potremmo calcolare direttamente le ampiezze degli spicchi in gradi con un procedimento del tutto analogo a quello impiegato per le percentuali:

- calcolare per ogni *dato* quanta parte è del *totale*, cioè il rapporto *dato*/*totale*, [nel nostro caso 144291/950502 = 0.1518…, cioè i consumi alimentari sono 0.1518… volte il totale dei consumi] e prendere la stessa porzione di 100 [0.1518… volte 100, cioè 15.18… arrotondabile a 15]:

(3.1) $$percentuale = \frac{dato}{totale} \cdot 100$$ <u>oppure:</u>

- moltiplicare ogni *dato* per lo stesso fattore che trasforma il *totale* in 100, ossia per 100/*totale*:

(3.2) $$percentuale = dato \cdot \frac{100}{totale}$$

Abbiamo anche osservato che è facile verificare l'equivalenza di (3.1) e di (3.2): moltiplicando per 100 prima della divisione per *totale* o dopo di essa si ottiene comunque lo stesso numero.

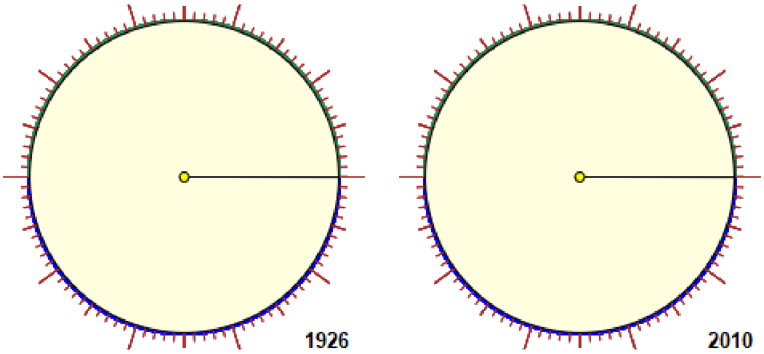
Nel caso dei diagrammi a settori circolari il totale viene rappresentato dall'intero cerchio, cioè da 360°. L'*ampiezza* in gradi da associare a un particolare *dato* può quindi essere calcolata usando le formule che si ottengono da (3.1) e (3.2) mettendo 360 al posto di 100. *Scrivi* queste formule:

(4.1) *ampiezza* = **(4.2)** *ampiezza* =

24 Con questo procedimento, i 5 dati della tabella seguente verrebbero rappresentati dalle ampiezze angolari sotto indicate, di cui riportiamo anche gli arrotondamenti alle unità di grado. Come mai la somma dei valori nelle prime 5 caselle dell'ultima riga non fa 360?

	dato1	dato2	dato3	dato4	dato5	totale
valori originali	21902	34506	9702	5704	186	72000
ampiezze angolari	109.51°	172.53°	48.51°	28.52°	0.93°	360°
ampiezze arrotondate	110°	173°	49°	29°	1°	360°

25 Traccia qui sotto i diagrammi circolari relativi ai consumi negli anni indicati.



26 In ciascuna delle rappresentazioni grafiche considerate per rappresentare i valori numerici della tabella iniziale abbiamo calcolato la misura di una grandezza geometrica. Individuala e completa il seguente schema.

istogramma	*lunghezza*
diagramma a striscia	....
diagramma a settori circolari	....

A volte questi diagrammi vengono anche chiamati ***areogrammi*** in quanto i dati non vengono rappresentati solo con segmenti aventi lunghezze ad essi proporzionali o con angoli aventi ampiezze ad essi proporzionali, ma con delle figure di area proporzionale:

– nel caso degli istogrammi abbiamo tracciato dei rettangoli di ugual base aventi per altezza le *lunghezze* ottenute,

– nel caso dei diagrammi a striscia abbiamo tracciato dei rettangoli di ugual altezza e aventi per base le *lunghezze* ottenute,

e i rettangoli in cui una dimensione è stata fissata hanno *area* che varia proporzionalmente all'altra dimensione,

– nel caso dei diagrammi a settori circolari abbiamo tracciato dei settori di egual raggio e formanti angoli delle *ampiezze* ottenute,

e i settori circolari di raggio fissato hanno *area* che varia proporzionalmente all'ampiezza dell'angolo.

Si possono realizzare istogrammi e diagrammi a settori circolari anche rappresentando i dati con delle figure solide aventi volumi proporzionali ai dati. In *figura 6* sono contenute diverse rappresentazioni degli stessi dati:

– tre istogrammi in cui i dati sono stati raffigurati con rettangoli di ugual base, con segmenti o con parallelepipedi di ugual base;

– due diagrammi a settori in cui i dati sono stati raffigurati con settori di uno stesso cerchio o con "spicchi" di uno stesso cilindro.

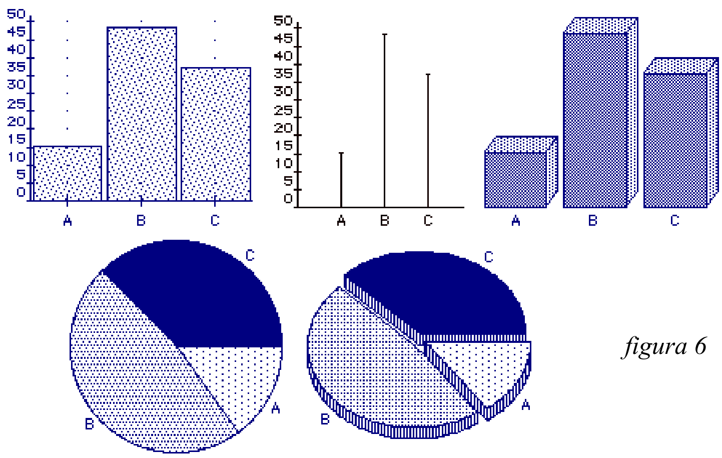


figura 6

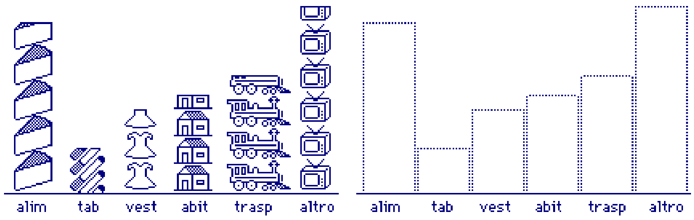
Le rappresentazioni dei dati con figure geometriche solide a volte vengono chiamate ***stereogrammi***.

I nomi che abbiamo impiegato sono derivati dalla lingua greca: *gramma* significa *disegno*, *istós* significa *telaio* ("istogramma" indica quindi una rappresentazione grafica a forma di telaio: i dati vengono rappresentati con delle figure disposte lungo righe parallele, così come accade per i fili nel telaio), *stereós* significa *solido*.

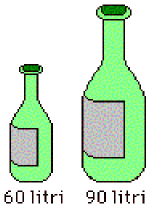
A volte si usano anche altri nomi. Ad esempio i diagrammi a settori circolari vengono chiamati anche *diagrammi a torta*, gli istogrammi a volte vengono chiamati *diagrammi a barre* (quando si usano segmenti) o *diagrammi a colonne* o *a canne d'organo* (quando si usano rettangoli di egual base).

Vi sono poi gli ***ideogrammi***, cioè diagrammi in cui i dati sono rappresentati mediante figure simboliche in quantità o dimensione che varia in proporzione ai dati. Spesso (vedi *figura 7*) non sono altro che degli istogrammi dall'aspetto un po' più frivolo.

figura 7



Nei giornali e alla televisione alcuni tipi di ideogrammi sono spesso usati in maniera errata.



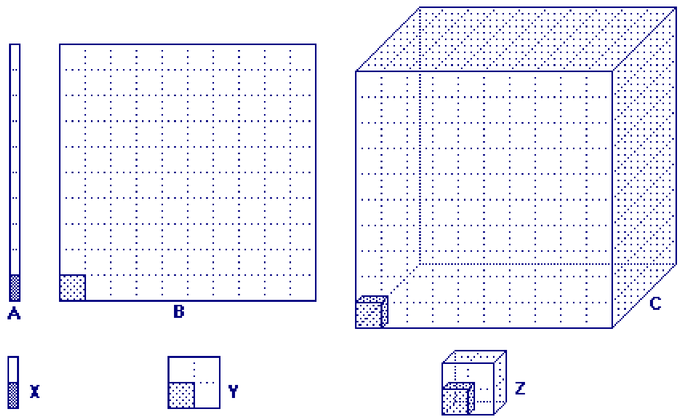
27 Un giornale per visualizzare il confronto tra la quantità di vino che in un anno beve in media un abitante del paese A e quella che beve in media un abitante del paese B usa l'ideogramma a fianco. Discutete la correttezza di questa rappresentazione.

Se si ingrandisce una figura con il fattore di scala k il suo volume cresce maggiormente, di un fattore pari a k^3.

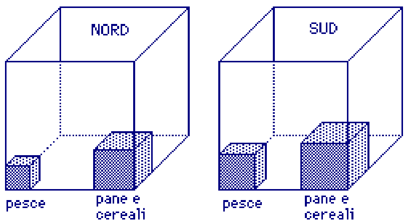
28 Completa la tabella seguente indicando per ciascuna delle figure il rapporto tra l'intera figura e la parte evidenziata (C e Z sono cubi).

EstensioneInteraFigura / EstensioneParteEvidenziata

A	**B**	**C**
X	**Y**	**Z**



Gli *stereogrammi* consentono il confronto di dati con ordini di grandezza molto diversi.



A fianco sono riportati due diagrammi in cui i dati vengono rappresentati con dei cubi. Il cubo "trasparente" rappresenta il totale (100%) dei consumi nel 1985, i cubi al suo interno rappresentano l'incidenza di alcune voci di spesa. Nel caso della spesa per pesce nell'Italia settentrionale l'incidenza è dello 0.6%; su un istogramma non avremmo potuto rappresentarla efficacemente.

5. I valori medi

I dati riportati nella tabella iniziale sono dati collettivi, indicano cioè il consumo complessivo della popolazione italiana. Dividendo il consumo complessivo per il numero degli abitanti si trova il ***consumo medio per abitante*** o ***consumo pro-capite***.

Se indichiamo con N la quantità degli abitanti e con $c_1, c_2, \ldots c_N$ i consumi di ciascuno degli N abitanti, possiamo scrivere:

$$\textit{consumo pro-capite} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_N}{N}$$

Più in generale si chiama ***media*** di più numeri il rapporto tra la loro somma e la loro quantità:

$$\textbf{(5.1)} \qquad \textit{media} = \frac{\textit{numero}_1 + \textit{numero}_2 + \ldots + \textit{numero}_N}{N}$$

A volte si usa l'espressione più estesa ***media aritmetica*** per distinguere questo valore da altri tipi di valori medi, di cui discuteremo più avanti.

Il consumo pro-capite è dunque la media aritmetica dei consumi effettuati da tutti gli abitanti. I consumi complessivi indicati nella tabella sono stati ottenuti servendosi dei dati relativi alla vendita dei vari tipi di beni e di servizi, non sommando i consumi abitante per abitante: dai dati sulle vendite si riesce a ottenere quanto ha speso il complesso degli italiani, cioè il valore di $c_1+c_2+\ldots+c_N$, non i valori di $c_1, c_2, \ldots, c_N$.

29 Di quale informazione (ulteriore, rispetto a quelle fornite finora nella scheda) hai bisogno per calcolare il consumo pro-capite per l'abbigliamento nel 2010?

30 Sapendo che la popolazione presente in Italia nel 2010 era di 59.7 milioni, calcola il consumo pro-capite per l'abbigliamento ed esprimilo (opportunamente arrotondato) in euro.

È *come se* ogni persona avesse speso .... € per vestirsi nel 2010, anche se la spesa per l'abbigliamento è un fenomeno che non si manifesta *in maniera uniforme nella popolazione*, ma c'è, ovviamente, chi spende di più e chi di meno.

Analogamente, se impieghiamo 2 ore per percorrere in auto una distanza di 170 km diciamo di aver tenuto una *media* di, o che siamo andati ad una *velocità media* di, 85 km/h; anche in questo caso, tuttavia, il movimento della macchina *non è uniforme nel tempo* del viaggio.

Velocità media e consumo pro-capite sono esempi di ***valori medi***, cioè di particolari modelli matematici impiegati per sintetizzare attraverso un unico numero il comportamento di un certo fenomeno.

La velocità media non è tuttavia un esempio di media aritmetica, cioè non è esprimibile nella forma ➜ (5.1). [per approfondimenti: ➜ ques. 39]

Anche se il consumo pro-capite è, come abbiamo detto, un dato fittizio, è sovente utile. Vediamo perché risolvendo gli esercizi seguenti.

31 Il consumo totale di caffè in Italia è stato, nel 1881 e nel 1981, rispettivamente di 140 e 2277 migliaia di quintali. Puoi dire che un italiano nel 1981 beveva 2277/140 = 16 volte (circa) la quantità di caffè che beveva un italiano cent'anni prima? Perché?

32 Controlla la tua risposta completando la seguente tabella relativa al consumo di caffè,

	popolazione ital. (migliaia)	consumo totale (quintali)	cons. pro-capite (g/ab.)
1881	29 791	$140 \cdot 10^3$	
1981	56 557	$2\,277 \cdot 10^3$	

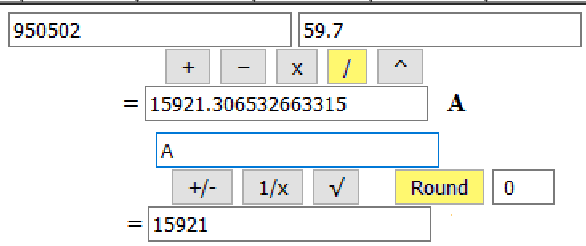
arrotondando il risultato ai grammi (ossia esprimendo il risultato in grammi e arrotondandolo poi alle unità). Indica il procedimento seguito per eseguire i calcoli.

33 Il consumo totale di zucchero nel 1986 del Portogallo e dell'Irlanda è stato, rispettivamente, di 275 616 e 145 181 tonnellate. Puoi dire che in Portogallo si mangiava più "dolce" che in Irlanda? Perché?

Il consumo pro-capite è sovente preferibile perché, essendo indipendente dalla numerosità della popolazione, è *più facilmente confrontabile* con consumi relativi ad altri tempi (➜ quesiti 32 e 32) o ad altre zone geografiche (➜ quesito 33).

34 Sapendo che la popolazione presente in Italia nel 2010 era di 59.7 milioni, trova il consumo pro-capite totale e quello per ciascun gruppo di beni, arrotondando il risultato agli euro. Utilizza i calcoli qui sotto svolti con la "grande" CT già considerata in precedenza.

aliment.	tabacco	vestiti	abitaz.	trasporti	altro	*totale*




```
15921.306532663315 round to 0^ digit after units: 15921
950502 / 59.7 = 15921.306532663315
6469.949748743718 round to 0^ digit after units:   6470
2007.6549413735343 round to 0^ digit after units:  2008
119857 / 59.7 = 2007.6549413735343
3522.361809045226 round to 0^ digit after units:   3522
210285 / 59.7 = 3522.361809045226
1195.1758793969848 round to 0^ digit after units:  1195
71352 / 59.7 = 1195.1758793969848
309.22948073701843 round to 0^ digit after units:   309
18461 / 59.7 = 309.22948073701843
2416.934673366834 round to 0^ digit after units:   2417
144291 / 59.7 = 2416.934673366834
```

35 Esprimi la relazione tra *consumo complessivo*, *consumo pro-capite* e *numero di abitanti* completando le seguenti formule:

(5.2) *consumo pro-capite* =

(5.3) *consumo complessivo* =

(5.4) *numero di abitanti* =

La seguente tabella (5.5), che contiene i *consumi medi mensili per famiglia* relativi all'anno 2007, ci mostra che il consumo calcolato per tutto il paese è diverso da quello di ciascuna delle due zone geografiche: settentrionale e centrale, meridionale e insulare (zone che indicheremo con SC, MI). Ad esempio, in MI una famiglia per i trasporti mediamente spende molto meno che in SC; il dato relativo a tutta l'Italia è compreso tra quello delle due zone. Ciò conferma l'osservazione che abbiamo fatto circa la natura "fittizia" dei valori medi.

(5.5)

	aliment.	tabacco	vestiario	abitaz.	trasporti	altro	totale
SC	459.57	20.22	157.70	764.11	415.67	1320.53	2722.13
MI	480.49	24.10	153.00	450.88	260.09	600.70	1969.26
Italia	466.29	21.47	156.19	663.39	365.65	807.08	2480.07

36 Dalle prime voci della tabella sembra che la spesa familiare mensile in Italia sia pari alla *media aritmetica* di quelle nelle due zone SC e MI. Ma le ultime colonne successive fanno emergere qualche dubbio. Controlla numericamente tale ipotesi su questa voce.

$$\frac{\textit{spesa per trasporti in SC} + \textit{spesa per trasporti in MI}}{2} = \text{..............................}$$

Quale sarebbe stato il modo corretto per ottenere il consumo medio per famiglia in Italia a partire da quelli di SC e MI?

Avremmo dovuto ricordare il significato di consumo medio, cioè utilizzare ➔ (5.2), mettendo

consumo per famiglia e *numero di famiglie* al posto di
consumo pro-capite e di *numero di abitanti*

Proviamo a farlo.

Utilizzando i dati della seguente tabella **A** e la relazione (5.3) possiamo completare le prime due righe dell'ultima colonna (riquadri con "?"). Mediante una semplice somma possiamo completare anche la colonna centrale (altro riquadro con "?"). Sotto è riportato il nuovo aspetto **B** della tabella. Non sono stati ancora completati i calcoli. Si noti che i calcoli sono stati impostati in modo da non portarsi dietro tutti gli zero.

Possiamo quindi passare a **C**, in cui abbiamo tenuto presente che per sommare le prime due righe dell'ultima colonna possiamo procedere senza tener conto dei 2 zero finali e poi aggiungerli alla fine.

A

	consumo per famiglia in trasporti	numero di famiglie	consumo complessivo in trasporti
SC	415.67	16 200 000	**?**
MI	260.09	7 680 000	**?**
Italia	**???**	**?**	**??**

↓

B

	consumo per famiglia in trasporti	numero di famiglie	consumo complessivo in trasporti
SC	415.67	16 200 000	41567 · 162 · 1000
MI	260.09	7 680 000	26009 · 768 · 100
Italia	**???**	23 880 000	**??**

↓

C

	consumo per famiglia in trasporti	numero di famiglie	consumo complessivo in trasporti
SC	415.67	16 200 000	41567 · 162 · 1000
MI	260.09	7 680 000	26009 · 768 · 100
Italia	**???**	23 880 000	(41567·1620+26009·768)·100

37 Usando ➔ (5.2) calcola il valore ??? (consumo medio per famiglia in trasporti relativo all'Italia), arrotondalo e confrontalo con quello contenuto in ➔ (5.5). Utlizza una delle CT considerate sopra.

```
(41567*1620+26009*768)*100/23880000
```

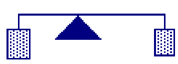
consumo medio per famiglia in Italia = *consumo complessivo*/*numero di famiglie* =

= .... → [arrotondando] ....

Abbiamo visto che la media aritmetica dei consumi per famiglia delle due zone geografiche non coincide con il consumo per famiglia italiano.

Ciò dipende dal fatto che le spese per famiglia delle due zone influiscono diversamente sul consumo complessivo in quanto il numero delle famiglie, per cui vengono moltiplicate, è diverso nei due casi. Si dice che la spesa familiare di ciascuna zona ha un *peso* diverso sulla spesa familiare in Italia.

Dalla ➔ tabella (5.5) si vede che la spesa media in Italia è più vicina alla spesa media in SC che a quella in MI. Infatti in SC sono presenti più famiglie che in MI, e quindi il valore relativo a SC "pesa" maggiormente, facendo avvicinare a sé il valore relativo all'intero paese. La situazione è analoga a quella raffigurata a fianco: il punto di equilibrio è più vicino all'oggetto che pesa maggiormente.



38 La famiglia Bianchi è composta da due bambini piccoli, dai loro due genitori e dai nonni paterni. In questa famiglia gli adulti consumano a testa mediamente 1/5 di litro (200 ml) di latte al giorno mentre i bambini ne consumano mediamente 1/2 litro (500 ml) a testa. Poiché (200+500)/2 = 350, è corretto affermare che il consumo medio giornaliero di latte di un membro della famiglia Bianchi è di 350 ml?

Si presenta una situazione analoga se confrontiamo le *velocità medie* su due tratti di strada con quella relativa all'intero percorso.

39 Il signor Rossi per raggiungere il posto di lavoro deve percorre 12 km per arrivare al casello autostradale più vicino e ulteriori 35 km di autostrada. In un dato giorno il signor Rossi andando a lavorare impiega 30 minuti per il tratto cittadino e 20 minuti per il tratto autostradale.

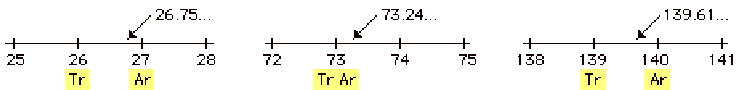
- Qual è la velocità media del signor Rossi in ciascuno dei due tratti?
  $v_{tratto1} =$ $\qquad\qquad$ $v_{tratto2} =$
- Qual è la velocità media del signor Rossi sul percorso complessivo? $\qquad v =$
- Confronta v con la media di $v_{tratto1}$ e $v_{tratto2}$. $\qquad$ *media* di $v_{tratto1}$ e $v_{tratto2} =$

6. Cifre significative

Abbiamo visto che un numero può essere approssimato agli interi:

- per ***troncamento***, cioè togliendo tutte le cifre successive al posto delle unità, o:
- per ***arrotondamento***, cioè prendendo l'intero *più vicino*, e, più precisamente:
  - se la cifra a destra di quella delle unità (cioè se la cifra dei decimi) è
    0, 1, 2, 3 o 4 $\quad$ prendendo il numero troncato alle unità,
  - se è $\quad$ 5, 6, 7, 8 o 9 $\quad$ prendendo il numero troncato alle unità e aumentato di uno.

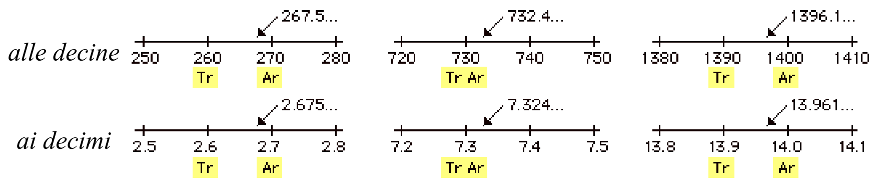
Sotto sono raffigurate due situazioni (la 1^a e la 3^a) in cui troncamento e arrotondamento sono diversi e una (la 2^a) in cui coincidono.



Per *troncare* 238 712 alle migliaia, poiché 238712 = 238.712 migliaia, trovato il troncamento agli interi di 238.712, cioè 238, possiamo prendere 238 mila, ossia 238 000. Per *arrotondarlo* alle migliaia, poiché l'arrotondamento agli interi di 238.712 è 239, prendiamo 239 mila, ossia 239 000.

In altre parole per troncare alle migliaia sostituiamo con 0 tutte le cifre a destra di quella delle migliaia; per arrotondare alle migliaia procediamo analogamente e poi aumentiamo di 1 migliaio il numero ottenuto se la prima cifra a destra di quella delle migliaia è maggiore o uguale a 5.

Qui sotto sono raffigurati alcuni arrotondamenti alle decine e ai decimi, realizzabili con ragionamenti simili: 13.961… ai decimi viene troncato con 13.900…, o 13.9; poiché la cifra a destra di quella dei decimi è 6, che non è minore di 5, per ottenere l'arrotondamento dobbiamo aggiungere 0.1 (1 decimo): 13.9 → 14.0.



40 Con ragionamenti simili esegui i seguenti *arrotondamenti*:

3456 alle decine .... $\qquad$ 6825750 ai milioni ....
163 alle decine .... $\qquad$ 0.3695 ai centesimi ....
84126500 ai milioni .... $\qquad$ 2.471 ai centesimi ....

Consideriamo la seguente tabella, relativa alla retribuzione annua lorda di un dipendente pubblico di medio livello in diversi anni in cui era in vigore la lira. Abbiamo aggiunto in fondo i dati non arrotondati presenti nelle statistiche ufficiali da cui li abbiamo ricavati e le cifre a cui sono stati approssimati.

	1926	1945	1965	1985
forma esp.	$9.15 \cdot 10^3$ L	$7.34 \cdot 10^4$ L	$1.42 \cdot 10^6$ L	$1.71 \cdot 10^7$ L
ord. grand.	migliaia	decine di migliaia	milioni	decine di milioni
per esteso	9150	73400	1420000	17100000
non arrotondato	*9151*	*73360*	*1415937*	*17099865*
arrotondamento alle	decine	centinaia	decine di migliaia	centinaia di migliaia

Tutti i dati (come si vede bene nella loro scrittura in forma esponenziale) sono stati arrotondati alla terza cifra iniziale (cioè alla terza cifra contando verso destra a partire dalla prima cifra diversa da 0).

Nel caso di 17099865 L la terza cifra iniziale (cifra sottolineata) era quella delle centinaia di migliaia; la cifra alla sua destra era 9, 9 è maggiore di 4, quindi 0 è stato aumentato di 1 e si è ottenuto 171….

Nel caso di 9151 L la terza cifra iniziale era quella delle decine; alla sua destra c'era 1, 1 è minore di 5, quindi la cifra non è stata aumentata.

In tutti i casi si dice che i dati sono stati arrotondati a 3 ***cifre significative***.

Se 9151 fosse stato arrotondato a 1 cifra significativa, cioè alla 1a cifra iniziale, avremmo ottenuto 9000; se fosse stato arrotondato a 2 cifre significative, avremmo ottenuto 9200 (infatti la 3a cifra iniziale è 5).

41 Arrotonda a due cifre significative i seguenti numeri:

3456 .... $\qquad$ 84126500 .... $\qquad$ 0.3695 ....
163 .... $\qquad$ 6825750 .... $\qquad$ 2.471 ....

Più in generale, se X è un numero:

- per ***arrotondare*** X alla cifra di ***posto n***:
  - se la cifra immediatamente a destra è
    0, 1, 2, 3 o 4 — si sostituiscono con 0 tutte le cifre a destra del posto *n*
  - se è 5, 6, 7, 8 o 9 — si aumenta di uno la cifra di posto *n* e
    si sostituiscono con 0 tutte le cifre alla sua destra
- per ***arrotondare*** X a ***n cifre significative*** si arrotonda alla *n*-esima cifra iniziale.

Lo script **round** consente di arrotondare i numeri. Come input si deve mettere il posto, indicato con un numero positivo o negativo a seconda che si debba approssimare ad una cifra successiva o precedente il "punto" decimale. Due esempi:

arrotondamento di x alla n-ma cifra dopo ".";
se n = 0 agli interi; se n = -2 alle centinaia; ...

x = 0.4571 n = 2 click
arrotondamento = 0.46 ordine di grandezza = -1

x = 3725140 n = -5 click
arrotondamento = 3700000 ordine di grandezza = 6

42 Quali input devi mettere in questo script per affontare gli stessi calcoli proposti nell'es. 41?

Gli arrotondamenti puoi comunque eseguirli anche con gli script **piccola CT** e **grande CT**.

7. Esercizi

e1 Completa la seguente tabella, che ricorda il significato di alcuni prefissi impiegati per trasformare una unità di misura in un suo multiplo o un suo sottomultiplo.

moltiplicatore	*prefisso*	*espressione verbale*
0.000 000 000 001 = 1/1000 000 000 000 = 10^{-12}	p	pico
0.000 000 001 = 1/1000 000 000 = …	n	nano
0.000 001 = 1/ … = …	m	micro
0.001 = 1/ … = …	m	milli
1000 = 10^3	k	chilo
1000 000 = 10^6	M	mega
1000 000 000 = …	G	giga
1000 000 000 000 = …	T	tera

e2 È maggiore un migliaio di miliardi o un miliardo di migliaia o un milione di milioni?

un migliaio di miliardi = $10^9 \cdot 10^3 = 10^{9+3} = 10^{12}$
un miliardo di migliaia = $10^3 \cdot 10^9$ = … = …
un milione di milioni = … = …

e3 I seguenti dati rappresentano la *retribuzione annua lorda* (in lire) di un dipendente pubblico di medio livello in alcuni anni; la retribuzione lorda è lo stipendio non gravato da imposte (nel caso di un dipendente di questo livello le imposte incidevano complessivamente per una percentuale che, nei vari anni, ha oscillato intorno al 15%). Completa le righe sottostanti.

forma esp.	1926: $9.15 \cdot 10^3$ L	1945: $7.34 \cdot 10^4$ L	1965: $1.42 \cdot 10^6$ L	1985: $1.71 \cdot 10^7$ L
ord. grand.	1926: migliaia	1945:	1965:	1985:
per esteso	1926: 9150	1945:	1965:	1985:

e4 Se con le forbici dimezzo un foglio di carta, poi sovrappongo le due parti ottenute e le taglio a metà, poi sovrappongo i foglietti così ottenuti e procedo con un nuovo taglio, alla fine ottengo $2 \cdot 2 \cdot 2$ foglietti; infatti ad ogni taglio raddoppio il numero dei foglietti. Quanti foglietti otterrei con 6 tagli? E con *n* (*n* numero intero positivo qualunque)? Impiegando entrambe le CT considerate nella scheda, calcola quanti foglietti si otterrebbero (impiegando una taglierina al posto delle forbici) con 10 tagli.

e5 (1) Moltiplicando tra loro due numeri, entrambi minori di 1, ottieni ancora un numero minore di 1?
(2) Moltiplicando tra loro due numeri, entrambi maggiori di 1, ottieni ancora un numero maggiore di 1?
(3) Che cosa puoi concludere sulla moltiplicazione tra due numeri, uno maggiore e l'altro minore di 1?

×	**<1**	**>1**
<1		
>1		

Rispondi e motiva le tue risposte (se è il caso, ricorrendo a degli esempi). Quindi riassumi le tue conclusioni nella tabella a fianco. Nelle caselle, a seconda dei casi, devi mettere " >1" (che sta per "numero maggiore di 1"), "<1" (che sta per "numero minore di 1") o "D" (che sta per "dipende").

e6 Disegna la pianta della tua classe, comprendente la cattedra e i banchi, su un foglio di carta millimetrata, indicando la scala (che puoi scegliere a tuo piacere).

e7 Abbiamo trovato che nel 1926 la voce trasporti (3420 milioni L) aveva un'incidenza del 3% sul totale dei consumi (124205 milioni L). Prova a calcolare il 3% di 124205. Riottieni il valore 3420? Trovate una spiegazione per questo fenomeno.

e8 Dalla tabella (1.1) risulta che in Italia nel 2010 si sono spesi 18 461 milioni (18 461 000 000) di € in tabacco. Ovviamente questo dato non è esatto, ma è stato arrotondato ai milioni (cioè è stato espresso in milioni e poi arrotondato alle unità). Inventa qualche valore che potrebbe rappresentare la spesa esatta.

e9 Il fatto che sia diminuita l'incidenza percentuale delle spese alimentari significa che gli italiani mangiano meno di un tempo?

e10 Non abbiamo sotto mano la CT e vogliamo eseguire alcuni calcoli. Non ci interessa il risultato esatto, ma solo una stima di esso. Possiamo precedere come nei seguenti esempi:

$$2681/354 \approx 3000/400 \approx 30/4 \approx 7; \qquad \frac{1860}{376891} \approx \frac{2\cdot10^{-3}}{4\cdot10^{5}} = \frac{20\cdot10^{2}}{4\cdot10^{5}} = 5\cdot10^{-3} = 0.005;$$

$$15384\cdot187 \approx 15000\cdot200 = 3000000; \qquad 89325\cdot714213 \approx 9\cdot10^{4}\cdot7\cdot10^{5} = 63\cdot10^{9} \approx 6\cdot10^{10}$$

cioè arrotondando i numeri a 1 o 2 cifre significative ed eseguendo i calcoli sui valori arrotondati. *Esegui* analogamente le seguenti operazioni:

$843\cdot279615 \approx$

$\dfrac{843}{279615} \approx$

$\dfrac{3675843}{19} \approx$

e11 Vogliamo controllare o avere un'idea più concreta dei dati della ➔ tabella (1.1). Proviamo ad esempio a stimare da soli l'ordine di grandezza di quanto si spendeva nel 2010 in trasporti. Gli spostamenti quotidiani sono quelli che incidono in massima parte su questa spesa; in prima approssimazione possiamo limitarci a un mezzo di trasporto pubblico, e supporre che una persona facesse mediamente due corse al giorno e che un biglietto costasse circa 2 €. Nel 2010 in Italia vi erano 60 milioni di persone.

Dobbiamo quindi calcolare:

(costo di un biglietto) · (n° delle corse) · (n° dei giorni in un anno) · (n° dei presenti in Italia) =
2 · 2 · 365 · 60000000

Calcola questo valore senza usare la CT, come suggerito nel quesito precedente, e confronta l'ordine di grandezza del risultato con quello del valore indicato dalla tabella.

e12 Stima, in modo simile a quanto fatto nel quesito precedente, la quantità di parole presenti in questa scheda e la spesa complessiva in quaderni sostenuta dagli studenti della tua scuola in un anno scolastico.

e13 Accantonando 1 € alla settimana, quanto tempo impiegherai per mettere da parte la somma di 600 €?

e14 La tabella seguente permette di confrontare l'evoluzione (in lire) delle retribuzioni e quella della spesa pro-capite per beni alimentari. Le percentuali riportate nell'ultima colonna non indicano esattamente quanta parte dello stipendio veniva spesa mediamente in alimentari, infatti:

– con uno stipendio venivano mantenute più persone;

– la retribuzione considerata è quella di una particolare categoria di lavoratori; ve ne erano altre con stipendi più bassi, altre con stipendi più alti; e vi erano redditi non da lavoro dipendente (negozianti, artigiani, professionisti, imprenditori, proprietari terrieri, …).

La tabella dà comunque un'idea di come è cambiata l'incidenza delle spese alimentari.

anno	spesa totale per alimentari	popola-zione	spesa alimentare pro-capite	spesa pro-capite arrotondata	retribuzione del dipendente del ➔ quesito e3	rapporto (percent.) tra spesa alimentare pro-capite e retrib.
1926	$7.77\cdot10^{10}$	$4.0\cdot10^{7}$	$1.9425\cdot10^{3}$	$1.94\cdot10^{3}$	$9.15\cdot10^{3}$	21%
1945	$9.42\cdot10^{11}$	$4.5\cdot10^{7}$	$2.0933\ldots\cdot10^{4}$	$2.09\cdot10^{4}$	$7.34\cdot10^{4}$	29%
1965	$1.02\cdot10^{13}$	$5.2\cdot10^{7}$	…….	…….	$1.42\cdot10^{6}$	…….
1985	$1.16\cdot10^{14}$	$5.7\cdot10^{7}$	…….	…….	$1.71\cdot10^{7}$	…….

Completa la tabella. Nella 5ª colonna ("spesa arrotondata") approssima i valori a 3 cifre significative, nell'ultima arrotonda le percentuali alle unità. Per calcolare il rapporto non battere i dati della spesa pro-capite arrotondati nella colonna 5ª ma utilizza il valore per esteso. Ad esempio la seconda riga è stata calcolata nel seguente modo:

– 9.42e11 / 4.5e7 → 20933.333333333333 = 2.0933…e4

– si è scritto nella 4ª colonna tale numero

– 9.42e11 / 4.5e7 / 7.34e4 * 100 → 28.519527702089007

– si è scritto nell'ultima colonna l'arrotondamento (29) del numero comparso sul visore

– si è scritto nella 5ª colonna l'arrotondamento (2.09e4) del dato scritto nella 4ª.

e15 Rispetto alla prima metà del Novecento la quantità e la qualità dei beni alimentari che una persona consuma è sicuramente aumentata. Tuttavia dall'ultima colonna della tabella del quesito precedente o dai grafici considerati in precedenza si vede che la porzione di stipendio spesa per l'alimentazione è diminuita. Ciò si spiega col fatto che oggi, mediamente, si guadagna molto più di allora anche in valore effettivo.

Se è vero che si possono fare molte più spese in generi non alimentari, occorre però osservare che queste spese spesso sono diventate "necessarie": sono aumentati i beni e i servizi che dobbiamo pagare per "*sopravvivere*". Ad esempio oggi quasi tutti devono impiegare dei mezzi di trasporto per raggiungere il posto di lavoro. Per essere aggiornati su ciò che succede, per conoscere nuove disposizioni di legge, per orientarsi nelle scelte politiche, … dobbiamo leggere giornali, guardare la televisione, … mentre un tempo (con una società meno complessa, città più piccole, …) era più facile accedere diversamente alle informazioni. Per andare a scuola fino a 16, 19 o più anni dobbiamo acquistare libri, pagare tasse d'iscrizione, … mentre un tempo non c'erano gli attuali livelli di obbligo scolastico e i mestieri richiedevano titoli di studio più bassi. …

Del resto senza l'aumento dei redditi non vi sarebbe stato sviluppo produttivo: affinché i beni prodotti vengano venduti è necessario che le persone abbiano la possibilità economica di acquistarli.

Sai *trovare* altri beni e servizi che ora (ma non nella prima metà del Novecento) sono diventati "*di sussistenza*"?

e16 Nel periodo A le monete in circolazione di taglio più piccolo sono quelle da 5 e 10 centesimi di euro, nel periodo B sono 5 e 10 lire, nel periodo C quelle da 2 e 1 lira. Tre persone devono suddividersi in parti eguali 1000 unità monetarie (€ o L). Quale somma (in moneta circolante) spetterebbe a ciascuno nei tre periodi?

1000/3 = [sul visore della CT] ...
somma spettante se si è nel periodo A: ...   se si è in B: ...   se si è in C: ...

e17 Se invece le tre persone del quesito e16 devono formare 1000 unità monetarie contribuendo in parti eguali, qual è la somma in moneta circolante che ciascuno deve versare?

somma spettante se si è nel periodo A: ...   se si è in B: ...   se si è in C: ...

e18 Ecco il risultato di 20/3 ottenuto con tre CT differenti. Descrivi il comportamento di ciascuna delle tre CT usando i concetti introdotti nel §6.

(1) 6.6666666   (2) 6.6666667   (3) 6.666666666

e19 Un piccolo caseggiato è suddiviso in 6 appartamenti di diverse dimensioni, tre di 76 m^2 e tre di 69 m^2. Alcune spese comuni (coloritura dei muri esterni, cambiamento del portone, riparazione del tetto, …) vengono ripartite in proporzione alla diversa estensione degli appartamenti. Per facilitare i conteggi la superficie di ogni appartamento viene espressa in millesimi di caseggiato, cioè viene posta uguale a 1000 la superficie complessiva degli appartamenti e vengono calcolate in proporzione le "quote millesimali" corrispondenti ai diversi appartamenti.

Calcola la quota millesimale (arrotondata ai decimi) di ogni appartamento e spiega il procedimento che hai impiegato.

e20 Il prodotto W viene venduto a peso. Sonia compra del W spendendo 8.35 €. Tornata a casa, non ricordandosi del prezzo di W, pesa la quantità acquistata e trova che il suo peso è di circa 760 grammi («circa» poiché la bilancia di Sonia va di 5 grammi in 5 grammi; il peso esatto in grammi potrebbe essere 762 o 759 o …).

Quanto costa al chilogrammo W?

Al variare del peso il costo di W varia in proporzione: a peso doppio corrisponde doppio costo, e così via. Qual è il fattore di proporzionalità "peso (in kg) → costo (in €)"? Qual è il fattore di proporzionalità "peso (in g) → costo (in €)"?

e21 Luigi, in attesa dell'autobus all'uscita da scuola (in centro città), vuole fare un piccolo studio statistico: trovare quante persone viaggiano mediamente in un'automobile in un'ora di punta. Durante due successivi "rossi" di un semaforo vicino, annota su un foglio per ogni macchina ferma il numero dei passeggeri (compreso l'autista) che ha a bordo. Fa 28 annotazioni:

2	1	3	1	1	1	2	4	1	2	2	1	2	3
1	1	3	1	4	1	2	2	1	3	1	1	1	3

Qual è il numero medio di passeggeri rilevato da Luigi? Effettua il calcolo con la CT nei due seguenti modi:

(1) eseguendo direttamente:

$$\frac{2+1+3+1+1+\ldots+1+3}{28}$$

(2) contando il numero delle volte che compare 1 (sia N_1), il numero delle volte che compare 2 (sia N_2), il numero delle volte che compare 3 (sia N_3), il numero delle volte che compare 4 (sia N_4) e infine calcolando:

$$\frac{1\cdot N_1+2\cdot N_2+3\cdot N_3+4\cdot N_4}{28}$$

Quale dei due metodi hai trovato più conveniente? perché?

e23 Considera i seguenti procedimenti di calcolo, in particolare le parti indicate in corsivo:

(1) *45·79·100000+789·26·100000* → *(45·79+789·26)·100000*
(per semplificare l'impostazione del calcolo sulla CT, riducendo il n° di tasti da battere)

(2) *45/17 – 12/17* → *(45–12)/17*
(per battere sulla CT un'unica divisione per 17)

(3) 15075/3 → *(15000+75)/3* → *15000/3+75/3* → 5000+25 → 5025
(nel calcolo mentale è più facile dividere per 3 separatamente 15000 e 75)

(4) 89·4 → *(90–1)·4* → *90·4–1·4* → 360–4 → 356
(nel calcolo mentale è più facile moltiplicare per 4 separatamente 90 e 1)

Nel caso (1) il nuovo termine è stato ottenuto estraendo il moltiplicatore che era comune ai termini di una addizione e mettendolo come fattore dell'intera somma:

moltiplico per 100000 il risultato della addizione 45·79+789·26
invece che i due addendi 45·79 e 789·26.

Nel caso (2) il nuovo termine è stato ottenuto estraendo il divisore che era comune ai termini di una sottrazione e mettendolo come fattore dell'intera differenza:

divido per 17 il risultato della sottrazione 45–12
invece che i due termini della sottrazione 45 e 12.

Possiamo riassumere entrambi i casi dicendo che il termine iniziale è stato *trasformato* estraendo il fattore (moltiplicatore o divisore) che era comune ai termini di una addizione o di una sottrazione e mettendolo come fattore dell'intera somma o differenza.

Questo tipo di trasformazione viene chiamato ***raccoglimento a fattore comune***.

Nelle trasformazioni evidenziate in corsivo nei casi (3) e (4) il nuovo termine è stato ottenuto distribuendo il fattore (moltiplicatore o divisore) di una somma (o una differenza) tra i diversi termini di essa:

– nel caso (3) divido per 3 gli addendi 15000 e 75 invece che il risultato dell'addizione;

– nel caso (4) moltiplico per 4 i termini della sottrazione 90 e 1 invece che 90–1.

Questo tipo di trasformazione viene chiamato ***distribuzione del fattore comune***.

Le due trasformazioni sono l'una l'inversa dell'altra, e possono essere sintetizzate con la stessa formula, che letta da sinistra a destra dà una trasformazione, letta da destra a sinistra dà l'altra.

- Per ottenere tale formula, *inserisci* nei riquadri sottostanti i simboli: **+ · ( )**
- *Scrivi* nella tabella i valori che assumono *a*, *b* e *c* nei casi considerati.

[tieni conto che, ad esempio, 45/17 può essere pensato come 45·(1/17) e 90–1 come 90+(–1)]

$$\square\, a \,\square\, b \,\square\square\, c \;=\; a \,\square\, c \,\square\, b \,\square\, c$$

	a	*b*	*c*
(1)	45·79		100000
(2)		–12	
(3)			1/3
(4)	90		

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
posto di una cifra (dopo ques.5), *potenza* n*-esima* (tra ques.5 e ques.7), *notazione scientifica* (dopo ques.12), *ordine di grandezza* (dopo ques.12), *proporzionalità* (prima di ques.14), *percentuale* (prima di ques.16, dopo ques.17), *media aritmetica* (§5), *approssimazione per arrotondamento e troncamento* (prima di ques.19, dopo ques.41).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Esempio di svolgimento parziale di quanto richiesto nel riquadro

1) Vedi le parti già evidenziate per le voci "posto di una cifra", "notazione scientifica", "ordine di grandezza", "potenza n-esima", nel paragrafo 1.

2) "posto di una cifra": «Nella misura 37.169 km la cifra di posto –3 rappresenta i metri»

"potenza n-esima": «L'area di una faccia di un cubo si ottiene elevando alla seconda la misura dello spigolo; il volume si ottiene invece elevandola alla terza»

3) In questa scheda abbiamo esaminato alcune statistiche di tipo economico e abbiamo visto alcuni strumenti matematici utili per rappresentare e analizzare dati.

Abbiamo considerato come è cambiato il modo di spendere i soldi per i vari tipi di beni e di servizi nel Novecento. Abbiamo visto come rappresentare numeri molto grandi e molto piccoli, a mano o con la calcolatrice, come confrontare numeri di diversa grandezza, …

[il riassunto deve proseguire riferendosi ai paragrafi successivi]

script: piccola CT grande CT isto isto con % striscia 100 60 round